

Braunschweigische  
Wissenschaftliche Gesellschaft

# Jahrbuch 2015

Sonderdruck  
Seiten 210–221



J. CRAMER Verlag • Braunschweig  
2016

## **Kräfte in elektromagnetischen Systemen und ihre Berechnung\***

### **– 150 Jahre Maxwellsche Gleichungen –**

WOLF-RÜDIGER CANDERS

IMAB Institut für Elektrische Maschinen, Antriebe und Bahnen, Technische Universität Braunschweig, Hans-Sommer-Straße 66, D-38106 Braunschweig,  
E-Mail: w.canders@tu-braunschweig.de

Die physikalischen Ursachen, die zur Entstehung von Kräften in elektromagnetischen Systemen führen, sind erst im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts geklärt worden. Trotzdem wurden bereits Mitte des 19. Jahrhunderts elektrische Maschinen gebaut und erfolgreich berechnet. Zum Verständnis, wie sich ohne genaue Kenntnis der physikalischen Ursachen die Berechnung von Kräften in elektromagnetischen Systemen entwickeln konnte, geht man zweckmäßig zu den Anfängen der Elektrotechnik zurück, die mit den Namen Faraday und Maxwell verknüpft sind. So war es schon zu Beginn der elektrotechnischen Forschung eine empirisch erkannte Tatsache, dass mit elektrischen Strömen auch Kräfte einhergehen, wobei die Rolle, die Eisen in diesem Zusammenhang spielte, erst später in ihrer vollen Bedeutung erkannt wurde.

Bereits 1831 formulierte Faraday das Induktionsgesetz, das die Änderung des magnetischen Flusses mit der Entstehung elektrischer Spannungen verknüpft. Genau vor 150 Jahren (1864) gelang es James Clark Maxwell, die Maxwellschen Gleichungen zu formulieren. Diese Gleichungen, die zuerst in Komponentenform vorlagen, wurden dann 1884 von O. Heaviside auf die vier heute geläufigen Vektorgleichungen reduziert. Ergänzt durch die beiden Materialgleichungen für die dielektrische Verschiebung und die magnetische Flussdichte bilden diese Gleichungen das heute noch gültige Grundgerüst der Elektrotechnik.

Zum Verständnis der Kraftbildung sind noch zwei weitere wichtige Forscher zu nennen:

Der niederländische Physiker und Mathematiker Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), der nicht nur die Gleichungen, auf denen Einstein dann die spezielle


---

\* Der Vortrag wurde am 10.04.2015 in der Klasse für Ingenieurwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \end{aligned}$$

**Materialgleichungen**

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \quad \text{mit} \quad \frac{\vec{J}}{\mu_0} = \vec{M} \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$



J. C. Maxwell

Abb. 1: Die Maxwellschen Gleichungen (Heaviside Formulierung, D: Verschiebungsstromdichte,  $\rho$ : Raumladungsdichte, B: mag. Flussdichte, E: el. Feldstärke, H: magn. Feldstärke, j: Stromdichte, P: Polarisation, J: magn. Polarisation, M: Magnetisierung).

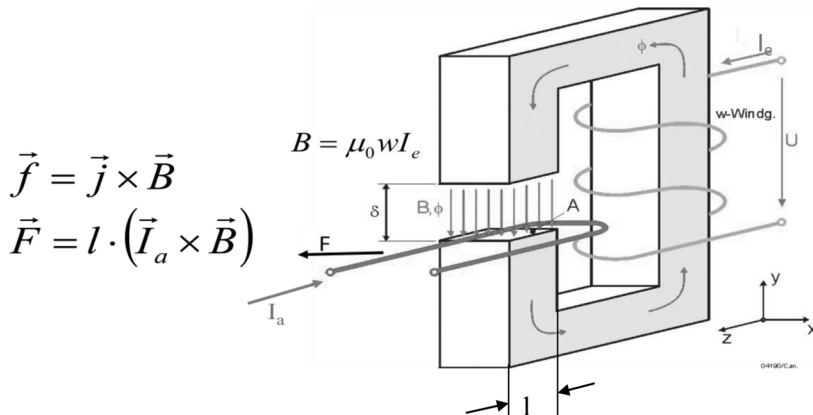


Abb. 2: Kraftbildung nach dem Lorentz Gesetz (l: Länge des Leiterabschnitts im Feld, I: Stromvektor, B: Flussdichtevektor).

Relativitätstheorie aufbaute, sondern auch die Kraft auf bewegte Ladungsträger im magnetischen Feld beschrieb. Diese ist in den Maxwellschen Gleichungen bereits implizit enthalten, wurde aber wegen ihrer Bedeutung später extra als Lorentzkraft bezeichnet.

Des weiteren ist Joseph Louis Lagrange zu nennen: Bereits 1788 beschrieb er die Dynamik eines Systems über Energieansätze – die kinetische und die potentielle Energie. Nach Lagrange können alle Energien diesen beiden Kategorien zugeordnet werden. Interessant ist, dass die Lagrange Gleichung auch in beschleunigten Koordinatensystemen Gültigkeit hat.

Euler Lagrange Gleichung:

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Lagrange Funktion L, T: kinetische Energie, V: potentielle Energie, Koordinaten  $q_i$ .

Mit der Lagrangeschen Energiemethode können die unterschiedlichsten Energieformen verknüpft und ihre Umwandlung beschrieben werden. Dies gilt auch für die elektromechanische Energiewandlung:

Elektrische Energie wird in einem elektromagnetischen System, das hier als „Black Box“ aufgefasst werden kann, als magnetische Energie zwischengespeichert (gemäß Induktionsgesetz). Verrichtet das elektromagnetische System mechanische Arbeit, wird hierzu magnetische Energie abgebaut (Lagrange)[2]. Der formelmäßige Zusammenhang folgt aus Gl. 3.

Die Kraft ergibt sich formal aus der Abnahme der magnetischen Energie über der Bewegungskordinate, bzw. aus der Zunahme der magnetischen Koenergie. Für den stationären Zustand muss dem System somit wieder elektrische Energie zugeführt werden. Gleichzeitig wird ein Teil der Energie in Verluste umgewandelt, die als Joulsche Wärme anfallen. Im stationären Zustand kann die Energiebilanz durch die Leistungsbilanz ersetzt werden. Aus der Energie / Leistungsbilanz können dann Spannungen, Ströme und Kräfte berechnet werden.

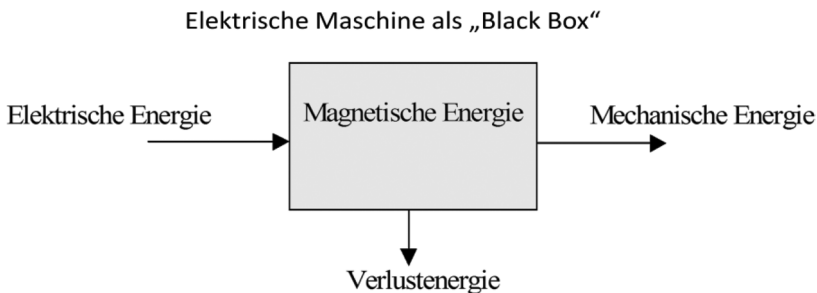


Abb. 3: Beschreibung der elektromechanischen Energiewandlung.

Bezeichnung der Terme:

$W_m$ : Magnetische Energie

$W_m^*$ : Magnetische Koenergie,

$F$ : Kraft

$i$ : Elektrischer Strom

$\Psi$ : Magnetische Flussverketung

$x$ : Bewegungskordinate

Analog gilt für die magnetische Koenergie  $W_m^* = \Psi \cdot i - W_m$

$$i(x, \Psi) = \frac{\partial W_m(x, \Psi)}{\partial \Psi}$$

$$F(x, \Psi) = -\frac{\partial W_m(x, \Psi)}{\partial x}$$

$$\Psi(x, i) = \frac{\partial W_m^*(x, i)}{\partial i}$$

$$F(x, i) = \frac{\partial W_m^*(x, i)}{\partial x}$$

Gleichung 3: Zusammenhang zwischen magnetischer Energie/Koenergie und Kraft.

Der Lagrange Ansatz ist auch heute noch die Ausgangsbasis für die analytische Berechnung elektrischer Maschinen. Faszinierend ist, dass mit Hilfe der makroskopischen Betrachtungsweise der Maxwellschen- und der Lagrange Gleichungen in der technischen Anwendung eine durchaus präzise Berechnung elektromagnetischer Energiewandler gelingt, ohne die der Elektrotechnik zugrundeliegenden quantenmechanischen Effekte genauer zu kennen.

Parallel zur Entwicklung der elektrotechnischen Grundlagen entwickelte sich deren Anwendung und damit auch der Elektromaschinenbau. Besonders einfach ist eine „Lorentz Anordnung“ mit bewegten Leitern in einem magnetischen Feld, wie sie erstmals von Faraday 1821 konstruiert wurde. 1834 stellte dann Herrmann Jacobi den ersten praxistauglichen Elektromotor vor, der 1838 erstmalig als Bootsantrieb (220 W) in St. Petersburg zur Anwendung kam.

Die in Abb. 4 gezeigte Anordnung hatte den Nachteil, dass der magnetische Luftspalt sehr groß war (Dicke einer Spulenseite + Isolationsauftrag + mechanischer Spalt), was einen erheblichen Aufwand für die Felderregung mit entsprechenden Verlusten zur Folge hatte.

Alternativ fand man eine Anordnung, bei der die Ankerleiter in Nuten verlegt werden konnten, ohne Einbuße an Drehmoment und wegen des nun kleineren Luftspaltes mit wesentlich weniger Erregeraufwand (Abb. 5).

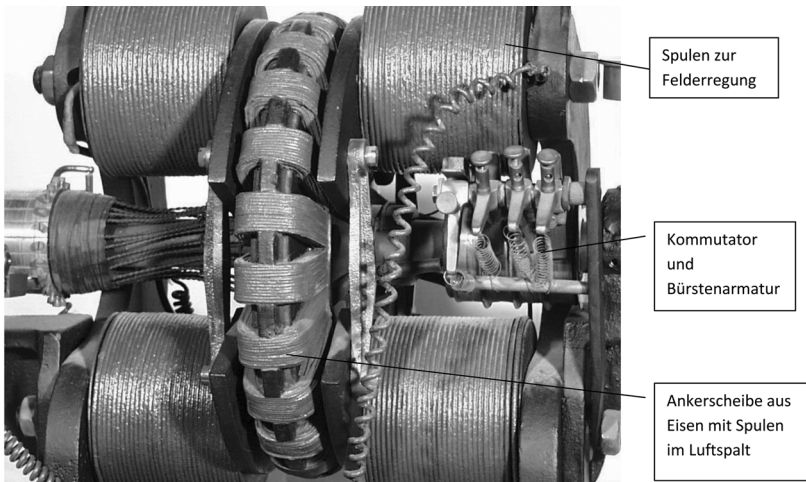


Abb. 4: Gleichstrom Motor nach dem Lorentzprinzip.



Abb. 5: Motor mit in Nuten verlegten Ankerleitern.

Die Größe des Luftspaltes ist nun nur noch durch das fertigungstechnisch erforderliche Mindestmaß begrenzt. Die Kraftbildung in dieser Anordnung kann mit dem Lorentzgesetz nicht mehr erklärt werden. Die Ankerleiter sind in der Nut nahezu allseits von Eisen umschlossen und nur dem sog. Nutenstreufeld ausgesetzt. Dieses verursacht in Wechselwirkung mit den Leiterströmen eine Kraft, die stets in Richtung Nutgrund weist, somit also nicht zum Drehmoment

beiträgt. Der Nachweis einer trotzdem effektiven Energiewandlung gelingt jedoch mit Hilfe einer Betrachtung der Energieverhältnisse im Luftspalt einer einfachen Modellanordnung (Abb. 6) für die drei Varianten – Leiter im Luftspalt – Leiter in Nuten – Strombelag auf glatter Eisenkante. Durch eine –hier nicht dargestellte– Felderregung möge im Luftspalt ein homogenes Erregerfeld (grüne Feldlinien) vorliegen, dem sich das Feld der stromdurchflossenen Leiter (rot) überlagert.

Vernachlässigt man die magnetischen Streufelder, lässt sich mit Hilfe der Energiebetrachtung zeigen, dass alle drei Anordnungen hinsichtlich der magnetischen Energie im Luftspalt gleichwertig sind. Durch Umrechnung der genutzten Geometrie der realen Maschine in eine magnetisch gleichwertige Geometrie mit glatten Eisenkanten (Aufweitung des Luftspaltes um den sog. Carterschen Faktor, Berechnung z.B. über konforme Abbildung) werden die geometrischen Unterschiede der 3 Varianten berücksichtigt. Der magnetisch wirksame Luftspalt  $\delta'$  ist dann in allen drei Fällen derselbe. Zusammen mit der Modellvorstellung, statt der Nutdurchflutung  $wI_a$  (Windungszahl  $w$ ) einen geometrisch unendlich dünnen Film mit der Stromstärke der Nutdurchflutung auf der Eisenoberfläche anzuordnen, gewinnt man einfach lösbare Differentialgleichungen für das magnetische Feld, in denen die Nutdurchflutung als Strombelag und damit nur noch als Randbedingung auftritt.

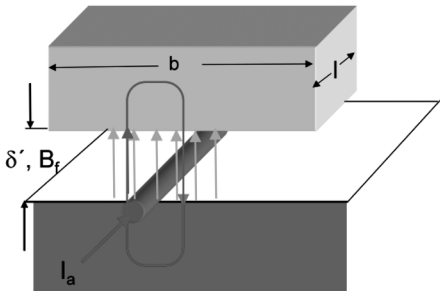
Der Schritt zum Strombelagsmodell erleichterte die Berechnung der elektrischen Maschinen erheblich, allerdings um den Preis eines hohen Abstraktionsgrades.

Das Strombelagsmodell ist die Basis aller analytischen Berechnungs- und Entwurfsverfahren des Elektromaschinenbaus, es hat sich über viele Jahrzehnte mit zunehmender Perfektionierung auch im Computerzeitalter bewährt und ist in vielen Lehrbüchern wiederzufinden, z.B. [1]. Die Lösung der Differentialgleichung für das magnetische Feld ermöglicht die Berechnung der magnetischen Energie und der Kraft. Besonders einfach wird es, wenn für den stationären Zustand die Leistungsbilanz ausgewertet werden kann.

Mit Hilfe der heute als Finite Elemente Methode (FEM) bekannten numerischen Rechenverfahren gelingt unter Berücksichtigung der nichtlinearen Werkstoffkennlinie des Eisenkreises und ohne geometrische Einschränkungen eine sehr genaue Berechnung der Feldverteilung und der magnetischen Energie im Magnetkreis. Der hierbei zur Kraftberechnung benutzte „Maxwellsche Spannungstensor“ basiert auf einer Auswertung der magnetischen Energien im Luftspalt der elektrischen Maschine und damit letztendlich wieder auf der Langrangeschen Energiemethode. Jedoch wird weder über die lokale Verteilung der Kräfte noch über deren spezielle physikalische Natur eine Aussage getroffen.

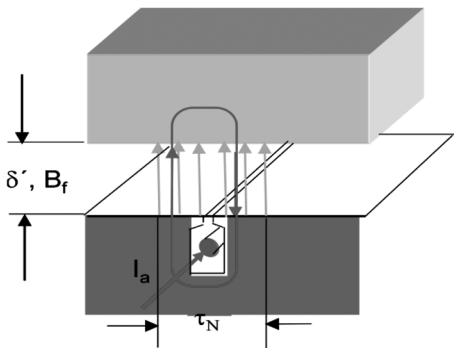
Erst mit den Erkenntnissen der Quantenmechanik konnte das Verständnis der magnetischen Kraftwirkungen deutlich erweitert werden. Die Entdeckung des Elektronenspins (1925) und des magnetischen Dipolmomentes der Elektronen

a)



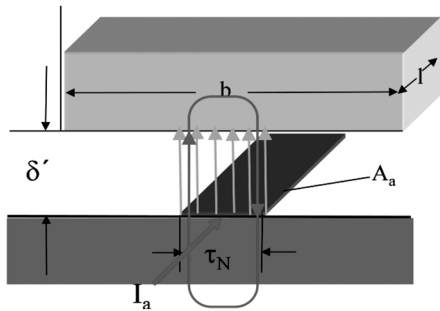
Diskrete Leiter  
zwischen  
Eisenflächen,  
ohne Streuung

b)



Diskrete Leiter in  
Nuten,  
ohne Streuung

c)



Strombelag

$$A_a = \frac{w I_a}{\tau_N}$$

Anordnung der  
Nutdurchflutung als  
Strombelag auf der  
Eisenoberfläche.

Abb. 6: Drei energetisch gleichwertige Anordnungen.



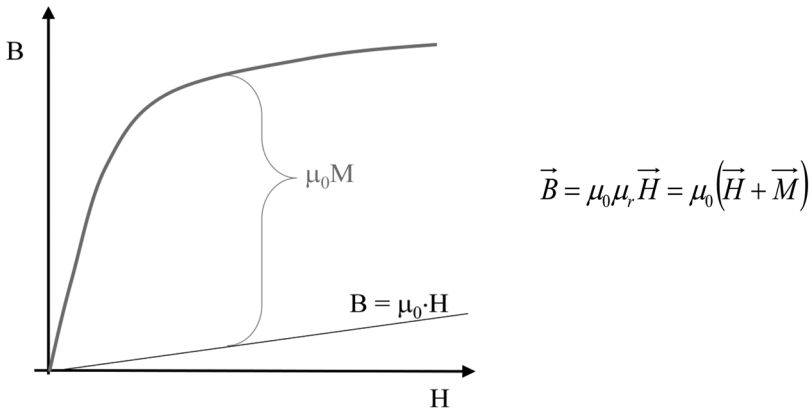


Abb. 7. Verstärkung eines äußeren Feldes durch den Elektronenspin – Magnetisierungskurve.

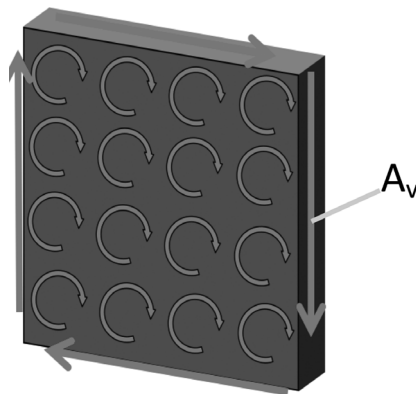


Abb. 8: Aufsummieren der Elektronenspins in einem Volumenelement zu einem Kantenstrombelag  $A_v$ .

sind hier die entscheidenden Schritte. 1928 wurde dann in der Dirac Theorie der Elektronenspin quantenmechanisch begründet.

In allen magnetischen Werkstoffen lässt sich der Elektronenspin durch ein äußeres Feld ausrichten, so dass dieses durch den Elektronenspin verstärkt wird (Abb. 7). Das funktioniert besonders gut im Werkstoff Eisen. Der Effekt wird in der Literatur als magnetische Polarisation  $J$  oder Magnetisierung  $M$  beschrieben.

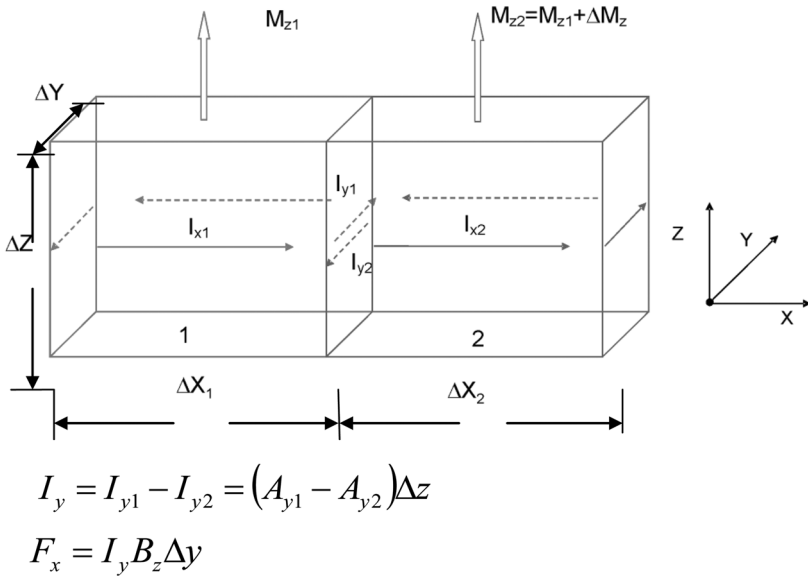


Abb. 9: Lorentzkraft an der Stelle der Änderung der Magnetisierung zwischen zwei Volumenelementen.

Die Magnetisierungskurve stellt wiederum ein Werkstoffgesetz dar. Mit ihrer Hilfe kann für ein äußeres Feld der Stärke  $H$  der Gewinn an Flussdichte  $B = \mu_0 \times M$  durch den Elektronenspin beschrieben werden. Betrachtet man nun ein Volumenelement gemäß Bild 7, in dem der Elektronenspin zu einem gewissen Grad durch ein Feld der Stärke  $H$  ausgerichtet ist, kann man jeden Spin als kleinen Stromwirbel auffassen. Summiert man diese Stromwirbel auf, verbleibt ein Kantenstrombelag auf den äußeren Kanten des Elementes, der aufgrund des Durchflutungsgesetzes genau für die Magnetisierung  $M$  gemäß Werkstoffgesetz verantwortlich ist.

Mit Hilfe dieser Modellvorstellung kann nun wieder die Maxwell'sche Theorie angewendet werden: Die Wechselwirkung des Kantenstrombelages  $A_y$  mit dem anregenden magnetischen Feld führt zu Lorentzkraften auf den Kanten des Volumenelementes.

Gliedert man ein Bauteil in viele dieser Volumenelemente, so werden stets dort Kräfte auftreten, wo sich die Magnetisierung zwischen zwei Volumenelementen ändert (Abb. 9).

Mit Hilfe der heute verfügbaren numerischen Rechenverfahren lassen sich bei entsprechend feiner Diskretisierung die magnetischen Kräfte als im Volumen des betrachteten Bauteiles verteilte Lorentzkraften mit hoher Genauigkeit bestimmen.

Mit diesem Elementarstrommodell ist es nun möglich, die Verteilung der Kräfte bzw. der Kraftdichten im Volumen einer Maschine zu berechnen, wie es z.B. in [3] vorgestellt wurde. Dies ist hilfreich, wenn lokale Kraftanregungen für akustische Effekte oder lokale mechanische Beanspruchungen filigraner magnetischer Strukturen ausgewertet werden sollen.

Die Aufintegration der lokalen Kraftdichten über das Volumen liefert die Gesamtkraft, die auf das Bauteil wirkt. Diese ist erfreulicherweise gleich der Kraft, die durch Anwendung des Maxwellschen Spannungstensors mit den Finite Elemente Programmen berechnet wird. Da mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors jedoch ein zum Volumenintegral äquivalentes Oberflächenintegral ausgewertet wird (Integralsatz von Gauss-Ostrogradski), kann dieses Verfahren keine Information über die lokale Kraftverteilung im Volumen angeben.

Abb. 10 und 11 stellen beispielhaft die Kraftverteilungen im Rotor zweier Permanentmagnet erregter Synchronmaschinen (PMSM) mit unterschiedlicher Geometrie dar. Die Stromverteilung im Stator entspricht Nennlast. Es wird deutlich, dass sich die Volumenkräfte an den Kanten der Magnete und auch an den Eisenoberflächen konzentrieren. Am Übergang von Magnet zu Joch (Abb. 10) können sie sogar negativ werden. Wertet man diese Berechnung für die Kraftverteilung auf der Statorseite aus (hier nicht dargestellt), wird deutlich, dass die magnetischen Kräfte beim Durchlauf des Rotors an den Statorzähnen stark schwanken. Sie „zupfen“ sozusagen in radialer und tangentialer Richtung an den Zähnen und sind damit für die Schwingungsanregung des Stators und für elektromagnetische Geräusche verantwortlich.

Vergleicht man die Berechnungsergebnisse mit den Messungen im Labor, so bleibt beim heutigen Stand der Rechentechnik festzuhalten, dass die Abweichungen zwischen den klassischen analytischen Berechnungsverfahren und der Drehmomentmessung bis zu 10 .. 15% betragen können, abhängig davon, wie genau die Sättigung des Eisens erfasst wurde, während die numerischen Verfahren (Finite Elemente-Methode mit Maxwellschen Spannungstensor oder die Rechnung mit dem Elementarstromansatz) eine Genauigkeit <5% erreichen können.

## **Zusammenfassung**

Parallel zum Anwachsen des elektrotechnischen Grundlagenwissens entwickelte sich die praktische Anwendung auf die elektrischen Maschinen. Mit Hilfe der vor 150 Jahren formulierten Maxwellschen Gleichungen, des Lorentzgesetzes und der Langrangeschen Energiegleichungen gelang die Berechnung elektrischer Maschinen mit durchaus guter Genauigkeit, ohne die in der Quantenmechanik begründeten Effekte der Elektrotechnik im einzelnen genau zu kennen. Diese Lücke konnte erst im ersten Drittel des vorigen Jahrhunderts mit der Entdeckung

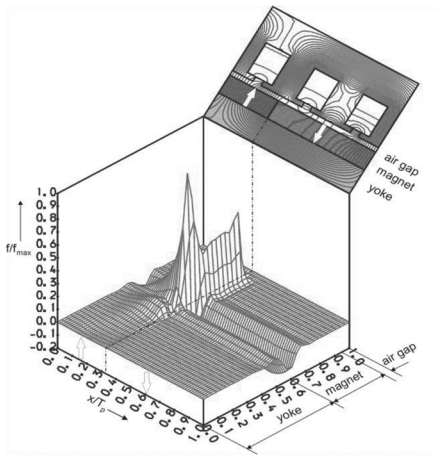
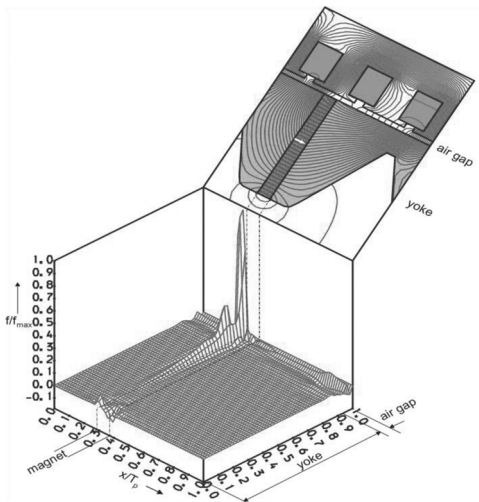


Abb. 10: Tangentialkraftdichte Verteilung im Rotor einer Synchronmaschine mit Oberflächenmagneten.



Feldverteilung einer PMSM in  
Sammleranordnung unter Last  
und

Kraftdichteverteilung im Volumen  
des Rotors (eine Polteilung einer  
linearen Anordnung)

Abb. 11: Verteilung der Tangentialkraftdichten im Rotor einer Permanentmagnet erregten Maschine.

des Elektronenspins und damit des Verständnisses des Magnetismus geschlossen werden. Mit diesen Erkenntnissen und der modernen numerischen Rechentechnik (Methode der finiten Elemente, FEM) ist es nun möglich, eine sehr genaue Berechnung von Kräften und Drehmomenten auch bei nichtlinearem Werkstoffverhalten durchzuführen. Darüber hinaus gelingt mit einem modifizierten FEM Modell auch die Berechnung der lokalen Verteilung der Kräfte im Volumen magnetischer Kreise von elektrischen Maschinen, was bei einigen speziellen Anwendungen, wie z.B. akustischen Fragestellungen, hilfreich ist.

## Literatur

MÜLLER, G., B. PONICK, B. & K. VOGT 2007: Berechnung elektrischer Maschinen, 6. Auflage, Weinheim: WILEY-VCH.

WOODSON, H. H. & J. R. MELCHER 1968: Electromechanical Dynamics, New York, London, Sydney: J. Wiley & Sons.

WEH, H., H. MAY & M. SHALABY: Highly effective circuits for permanent magnet excited synchronous machines Proc. ICEM 90, International Conference on Electrical Machines 1990, Vol.3, pp.1040, Cambridge, Massachusetts, USA